方程 $\varphi_2(\varphi_3(n))=3^{\omega(n)}$ 的可解性

李昌吉

(阿坝师范学院 藏汉双语学院, 四川 汶川 623002)

摘 要: $\varphi_e(n)$ 为广义 Euler 函数, 探讨了含有 $e=2$ 和 $e=3$ 时的广义复合 Euler 函数的不定方程 $\varphi_2(\varphi_3(n))=3^{\omega(n)}$ 的可解性问题. 基于广义 Euler 函数 $\varphi_e(n)$ 的性质, 借助初等方法给出方程 $\varphi_2(\varphi_3(n))=3^{\omega(n)}$ 的全部 20 组解.

关键词: 广义 Euler 函数; 不定方程; 正整数解

1 引言

Euler 函数 $\varphi(n)$ 是数论中广为研究的重要的函数之一. 为将 Lehmer 的其他同余式从模素数的平方推广到任意模整数的平方, 蔡天新 [1] 等人引入了广义 Euler 函数 $\varphi_e(n)$, 其值为 $\varphi_e(n)=\sum\limits_{\substack{i=1\\(i,n)=1}}^{\left[\frac{n}{e}\right]}1$, e 是正整数, 即 $\varphi_e(n)$ 为序列 $1,2,\cdots,\left[\frac{n}{e}\right]$ 中与正整数 n 互质的数的个数, 当 $e=2$, $n>2$ 时, 易得 $\varphi_2(n)=\frac{1}{2}\varphi(n)$. 关于含有广义 Euler 函数 $\varphi_e(n)$ 的不定方程已有一定研究, 如文献 [2] 研究了方程 $\varphi(\varphi(n))=2^{\omega(n)}$ 的可解性, 文献 [3] 研究了方程 $\varphi_2(n)=2^{\omega(n)}$ 和 $\varphi_2(\varphi_2(n))=2^{\omega(n)}$ 的可解性, 文献 [4] 研究了方程 $\varphi_3(n)=\frac{n}{d}$ 的可解性, 文献 [5] 研究了方程 $S(SL(n^{11,12}))=\varphi_2(n)$ 的可解性, 文献 [6] 研究了方程 $\varphi_2(N)=S(N^{16})$ 的可解性, 文献 [7] 研究了方程 $\varphi_2(x-\varphi_2(x))=2$ 和 $\varphi_2(\varphi_2(x-\varphi_2(x)))=2$ 的可解性, 文献 [8] 研究了方程 $\varphi_6(n)=2^{\omega(n)}$ 的可解性.

本文将研究方程

$$\varphi_2(\varphi_3(n))=3^{\omega(n)} \tag{1}$$

的可解性.

2 引理

引理 1 [9] 设 n 是一个大于 2 的正整数, 那么 $\varphi(n)$ 是偶数.

引理 2 [9] 如果 m 和 n 是正整数, 那么 $\varphi(mn)=\frac{\gcd(m,n)\varphi(m)\varphi(n)}{\varphi(\gcd(m,n))}$.

引理 3 [10] 设 $n=3^{\alpha}\prod\limits_{i=1}^{k}p_i{}^{\alpha_i}>3$, 其中 $k\geq 1$, $\alpha\geq 0$, $\alpha_i\geq 1$, p_i 是不同的素数且

收稿日期: 2019-11-05
资助项目: 四川省教育厅一般项目 (18SB0006); 阿坝师范学院科研项目 (20170806, 20170806, 20171521, 201803005, ASB19-14)

$(p_i,3)=1(\forall i=1,\cdots,k)$, 则

$$\varphi_3(n)=\begin{cases}\frac{\varphi(n)}{3}+\frac{(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-\alpha-1}}{3}, \alpha\in\{0,1\}, and \quad p_i\equiv 2(\bmod 3)(1\le i\le k)\\ \frac{\varphi(n)}{3}, other\end{cases}$$

其中 $\Omega(n)=\alpha+\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i$, 当 $\alpha=0$ 时, $\omega(n)=k$; 当 $\alpha\geq 1$ 时, $\omega(n)=k+1$. 并规定 $\omega(1)=\Omega(1)=0$.

3 定理及其证明

定理 1 方程 (1) 的所有正整数解是 $n=23,25,29,43,49,81,87,123,145,187,205,226,232,236,326,328,332,352,400,486$.

证明 因为 $n=1,\ 2,\ 3$ 不是方程 (1) 的解, 所以 $n>3$, 设 $n=3^{\alpha}\prod\limits_{i=1}^{k}{p_i}^{\alpha_i}$, 其中 $\alpha\geq 0$, $\alpha_i\geq 1$, $k\geq 1$, p_i 是不同的素数, 不妨设 $p_1<p_2<\cdots<p_k$, 且 $(p_i,3)=1(i=1,\cdots,k)$. 根据 $\varphi_3(n)$ 的计算公式, 下面分三种情况分类讨论:

情况 1 当 $\alpha=0$ 且 $p_i\equiv 2(\bmod 3)(1\le i\le k)$ 时, 即 $n=\prod\limits_{i=1}^{k}{p_i}^{\alpha_i}$, 由引理 3 知

$$\begin{aligned}\varphi_3(n)&=\frac{\varphi(n)}{3}+\frac{(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-1}}{3}\\&=\frac{1}{3}\prod_{i=1}^{k}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+\frac{(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-1}}{3}\\&=\frac{2^{\omega(n)}}{3}\prod_{i=1}^{k}p_i^{a_i-1}\prod_{i=1}^{k}\frac{(p_i-1)}{2}+\frac{(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-1}}{3}\end{aligned}$$

整理得

$$\varphi_3(n)=2^{\omega(n)-1}\frac{1}{3}(2\prod_{i=1}^{k}p_i^{a_i-1}\prod_{i=1}^{k}\frac{(p_i-1)}{2}+(-1)^{\Omega(n)})$$

设 $m=\frac{1}{3}(2\prod\limits_{i=1}^{k}p_i^{a_i-1}\prod\limits_{i=1}^{k}\frac{(p_i-1)}{2}+(-1)^{\Omega(n)})=\frac{1}{3}t$(其中 m, t 是正整数), 则方程 (1) 可化为

$$\varphi_2(\varphi_3(n))=\frac{1}{2}\varphi(\varphi_3(n))=\frac{1}{2}\varphi(2^{\omega(n)-1}m)=3^{\omega(n)}$$

即

$$\varphi(2^{\omega(n)-1}\cdot m)=2\cdot 3^{\omega(n)} \tag{2}$$

1) 若 $\omega(n)\geq 3$ 即 $k\geq 3$ 时, 易知 $m\geq 3$, 由引理 1 得 $2|\varphi(m)$, 不妨设 $\varphi(m)=2d$, $d\in N^{+}$, 则由引理 2 知

$$\begin{aligned}\varphi(2^{\omega(n)-1}m)&=\frac{(2^{\omega(n)-1},m)}{\varphi(2^{\omega(n)-1},m)}\varphi(2^{\omega(n)-1})\varphi(m)\\&=\frac{(2^{\omega(n)-1},m)}{\varphi(2^{\omega(n)-1},m)}2^{\omega(n)-2}2d=2^{\omega(n)-1}d_1, d_1\in N^{+}\end{aligned}$$

则方程 (2) 化为 $2^{\omega(n)-1}d_1=2\cdot 3^{\omega(n)}$, 此时方程左边有因子 2^2, 而 $2^2\nmid 2\cdot 3^{\omega(n)}$, 所以方程 (2) 无解, 即方程 (1) 无解.

2) 当 $\omega(n)=2$ 即 $k=2$ 时, 方程 (2) 化为 $\varphi(2m)=18$, 易知 $2m=$19, 27, 38, 54. 因为 m, t 是正整数, 所以 $t=$57, 81. 又因为 $(-1)^{\Omega(n)}=\pm 1$,

所以 $t=57$ 时, $\prod_{i=1}^{2} p_i^{a_i-1}\frac{(p_i-1)}{2}=28(\Omega(n)$ 为偶数) 或 $\prod_{i=1}^{2} p_i^{a_i-1}\frac{(p_i-1)}{2}=29(\Omega(n)$ 为奇数).

所以 $t=81$ 时, $\prod_{i=1}^{2} p_i^{a_i-1}\prod_{i=1}^{2}\frac{(p_i-1)}{2}=40(\Omega(n)$ 为偶数) 或 $\prod_{i=1}^{2} p_i^{a_i-1}\prod_{i=1}^{2}\frac{(p_i-1)}{2}=41(\Omega(n)$ 为奇数).

经检验, $p_1=5$, $p_2=29$, $a_1=a_2=1$ 或 $p_1=5$, $p_2=41$, $a_1=a_2=1$ 或 $p_1=11$, $p_2=17$, $a_1=a_2=1$ 或 $p_1=2$, $p_2=113$, $a_1=a_2=1$ 或 $p_1=2$, $p_2=29$, $a_1=3$, $a_2=1$ 或 $p_1=2$, $p_2=59$, $a_1=2$, $a_2=1$ 或 $p_1=2$, $p_2=41$, $a_1=3$, $a_2=1$ 或 $p_1=2$, $p_2=83$, $a_1=2$, $a_2=1$ 或 $p_1=2$, $p_2=11$, $a_1=5$, $a_2=1$ 或 $p_1=2$, $p_2=5$, $a_1=4$, $a_2=2$ 满足条件, 所以此时方程 (1) 的解为 $n=145, 187, 205, 226, 232, 236, 328, 332, 352, 400$.

3) 当 $\omega(n)=1$ 即 $k=1$ 时, 方程 (2) 化为 $\varphi(m)=6$, 易知 $m=7, 9, 14, 18$. 因为 m, t 是正整数, 所以 $t=21, 27, 42, 54$. 因为 $(-1)^{\Omega(n)}=\pm1$, $t=2p_1^{a_1-1}\frac{(p_1-1)}{2}+(-1)^{\Omega(n)}$, 则

若 $t=21$ 时, $p_1^{a_1-1}\frac{(p_1-1)}{2}=10(\Omega(n)$ 为偶数) 或 $p_1^{a_1-1}\frac{(p_1-1)}{2}=11(\Omega(n)$ 为奇数),

若 $t=27$ 时, $p_1^{a_1-1}\frac{(p_1-1)}{2}=13(\Omega(n)$ 为偶数) 或 $p_1^{a_1-1}\frac{(p_1-1)}{2}=14(\Omega(n)$ 为奇数),

若 $t=42$ 时, $p_1^{a_1-1}\frac{(p_1-1)}{2}=\frac{41}{2}$ $(\Omega(n)$ 为偶数) 或 $p_1^{a_1-1}\frac{(p_1-1)}{2}=\frac{43}{2}(\Omega(n)$ 为奇数),

若 $t=42$ 时, $p_1^{a_1-1}\frac{(p_1-1)}{2}=\frac{53}{2}$ $(\Omega(n)$ 为偶数) 或 $p_1^{a_1-1}\frac{(p_1-1)}{2}=\frac{55}{2}(\Omega(n)$ 为奇数).

经检验, $p_1=23$, $a_1=1$ 或 $p_1=5$, $a_1=2$ 或 $p_1=29$, $a_1=1$ 满足条件, 所以此时方程 (1) 的解为 $n=23, 25, 29$.

情况 2 当 $\alpha=1$ 且 $p_i\equiv 2(\bmod 3)(1\le i\le k)$ 时, 即 $n=3\prod_{i=1}^{k} p_i{}^{\alpha_i}$, 由引理 3 知,

$$\begin{aligned}\varphi_3(n)&=\frac{\varphi(n)}{3}+\frac{(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-2}}{3}\\&=\frac{2}{3}\cdot 2^k\prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i-1}\prod_{i=1}^{k}\frac{(p_i-1)}{2}+\frac{(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-2}}{3}\\&=\frac{2^{\omega(n)}}{3}\prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i-1}\prod_{i=1}^{k}\frac{(p_i-1)}{2}+\frac{(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-2}}{3}\end{aligned}$$

整理得

$$\varphi_3(n)=2^{\omega(n)-2}\frac{1}{3}(4\prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i-1}\prod_{i=1}^{k}\frac{(p_i-1)}{2}+(-1)^{\Omega(n)})$$

设 $m=\frac{1}{3}(4\prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i-1}\prod_{i=1}^{k}\frac{(p_i-1)}{2}+(-1)^{\Omega(n)})=\frac{1}{3}t$(其中 m 是正整数, t 是正奇数), 则方程 (1) 可化为

$$\varphi_2(\varphi_3(n))=\frac{1}{2}\varphi(\varphi_3(n))=\frac{1}{2}\varphi(2^{\omega(n)-2}m)=3^{\omega(n)}$$

即

$$\varphi(2^{\omega(n)-2}\cdot m)=2\cdot 3^{\omega(n)} \tag{3}$$

1) 若 $\omega(n)\ge 4$ 即 $k\ge 3$ 时, 因为 $p_i\equiv 2(\bmod 3)(1\le i\le k)$, 易知 $m\ge 3$, 由引理 1 知 $2|\varphi(m)$, 不妨设 $\varphi(m)=2d$, $d\in N^+$, 则由引理 2 知,

$$\varphi(2^{\omega(n)-2}m)=\frac{(2^{\omega(n)-2},m)}{\varphi(2^{\omega(n)-2},m)}\varphi(2^{\omega(n)-2})\varphi(m)\frac{(2^{\omega(n)-2},m)}{\varphi(2^{\omega(n)-2},m)}2^{\omega(n)-3}2d$$

$$=2^{\omega(n)-2}d_1, d_1\in N^+$$

则方程 (2) 化为 $2^{\omega(n)-2}d_1=2\cdot 3^{\omega(n)}$.
此时方程左边有因子 2^2, 而 $2^2\nmid 2\cdot 3^{\omega(n)}$, 所以方程 (3) 无解, 即方程 (1) 无解.

2) 当 $\omega(n)=3$ 即 $k=2$ 时, 方程 (3) 化为 $\varphi(2m)=54$, 易知 $2m=$81,162. 因为 m 是正整数, t 是正奇数, 所以 $t=243$. 因为 $(-1)^{\Omega(n)}=\pm 1$, $t=4\prod\limits_{i=1}^{2}p_i^{a_i-1}\prod\limits_{i=1}^{2}\frac{(p_i-1)}{2}+(-1)^{\Omega(n)}$, 则 $\prod\limits_{i=1}^{2}p_i^{a_i-1}\prod\limits_{i=1}^{2}\frac{(p_i-1)}{2}=\frac{121}{2}$ ($\Omega(n)$ 为偶数) 或 $\prod\limits_{i=1}^{2}p_i^{a_i-1}\prod\limits_{i=1}^{2}\frac{(p_i-1)}{2}=61$($\Omega(n)$ 为奇数). 经检验, 不存在 p_i, a_i $(1\le i\le 2)$ 满足条件成立, 所以此时方程 (1) 无解.

3) 当 $\omega(n)=2$ 即 $k=1$ 时, 方程 (3) 化为 $\varphi(m)=18$, 易知 $m=$19, 27, 38, 54. 因为 m 是正整数, t 是正奇数, 所以 $t=$57, 81. 因为 $(-1)^{\Omega(n)}=\pm 1$, 则
若 $t=$57, 即 $4p_1^{a_1-1}\frac{(p_1-1)}{2}+(-1)^{\Omega(n)}=57$ 时, 仅当 $\Omega(n)$ 为偶数有意义, 且 $p_1^{a_1-1}\frac{(p_1-1)}{2}=14$,
若 $t=81$, 即 $4p_1^{a_1-1}\frac{(p_1-1)}{2}+(-1)^{\Omega(n)}=81$ 时, 仅当 $\Omega(n)$ 为偶数有意义, 且 $p_1^{a_1-1}\frac{(p_1-1)}{2}=20$.

经检验, $p_1=29$, $a_1=1$ 或 $p_1=41$, $a_1=1$ 满足条件, 所以此时方程 (1) 的解为 $n=$87, 123.

4) 当 $\omega(n)=1$ 即 $k=0$ 时, 则有 $n=3\prod\limits_{i=1}^{k}{p_i}^{\alpha_i}=3$, 显然不满足条件, 此时方程 (1) 无解.

情况 3 当 m 是其他情况时, 设 $n=\prod\limits_{i=1}^{k}{p_i}^{\alpha_i}$(其中 p_i 有可能是 3), 由引理 3 知,

$$\varphi_3(n)=\frac{1}{3}\varphi(n)=\frac{1}{3}\prod_{i=1}^{k}p_i^{a_i-1}(p_i-1)=\frac{2^k}{3}\prod_{i=1}^{k}p_i^{a_i-1}\prod_{i=1}^{k}\frac{(p_i-1)}{2}$$
$$=2^{\omega(n)-1}\frac{1}{3}2\prod_{i=1}^{k}p_i^{a_i-1}\prod_{i=1}^{k}\frac{(p_i-1)}{2}$$

设 $m=\frac{1}{3}2\prod\limits_{i=1}^{k}p_i^{a_i-1}\prod\limits_{i=1}^{k}\frac{(p_i-1)}{2}\frac{1}{3}t$(其中 m,t 是正整数), 则方程 (1) 可化为

$$\varphi_2(\varphi_3(n))=\frac{1}{2}\varphi(\varphi_3(n))=\frac{1}{2}\varphi(2^{\omega(n)-1}m)=3^{\omega(n)}$$

即

$$\varphi(2^{\omega(n)-1}\cdot m)=2\cdot 3^{\omega(n)} \tag{4}$$

1) 当 $\omega(n)\ge 4$ 即 $k\ge 4$ 时, 因为 m 是正整数, 易知 $m\ge 2$, 由则由引理 2 知,

$$\varphi(2^{\omega(n)-1}m)=\frac{(2^{\omega(n)-1},m)}{\varphi((2^{\omega(n)-1},m))}\varphi(2^{\omega(n)-1})\varphi(m)\frac{(2^{\omega(n)-1},m)}{\varphi((2^{\omega(n)-1},m))}2^{\omega(n)-2}\varphi(m)$$
$$=2^{\omega(n)-2}d_1, d_1\in N^+$$

则方程 (4) 化为 $2^{\omega(n)-2}d_1=2\cdot 3^{\omega(n)}$, 此时方程左边有因子 2^2, 而 $2^2\nmid 2\cdot 3^{\omega(n)}$, 所以方程 (4) 无解, 即方程 (1) 无解.

2) 当 $\omega(n)=3$ 即 $k=3$ 时, 方程 (4) 化为 $\varphi(4m)=54$, 易知 $4m=$81, 162, 显然不存在正整数满足条件成立, 所以此时方程 (1) 无解.

3) 当 $\omega(n)=2$ 即 $k=2$ 时, 方程 (4) 化为 $\varphi(2m)=18$, 易知 $2m=$19, 27, 38, 54. 因为 m,t 是正整数, 所以 $t=$57, 81, 此时有 $\prod\limits_{i=1}^{2}p_i^{a_i-1}\prod\limits_{i=1}^{2}\frac{(p_i-1)}{2}=\frac{57}{2}$, $\frac{82}{2}$.

经检验, $p_1=2$, $p_2=163$, $a_1=a_2=1$ 或 $p_1=2$, $p_2=3$, $a_1=1$, $a_2=5$ 满足条件, 所以此时方程 (1) 的解为 $n=$326, 486.

4). 当 $\omega(n)=1$ 即 $k=1$ 时, 方程 (4) 化为 $\varphi(m)=6$, 易知 $m=$7, 9, 14, 18. 因为 m,t 是正整数, 所以 $t=$21, 27, 42, 54, 此时有 $p_1^{a_1-1}\frac{(p_1-1)}{2}=\frac{21}{2},\frac{27}{2}$, 21, 27.

经检验, $p_1=43$, $a_1=1$ 或 $p_1=7$, $a_1=2$ 或 $p_1=3$, $a_1=4$ 满足条件, 所以此时方程 (1) 的解为 $n=$43, 49, 81.

综上所述, 命题得证.

4 结论

研究了含有复合广义 Euler 函数的不定方程 $\varphi_2(\varphi_3(n))=3^{\omega(n)}$, 其中 n 为正整数, 结合广义 Euler 函数 $\varphi_2(n)$ 和 $\varphi_3(n)$ 的性质, 利用初等方法进行分类讨论, 给出方程 $\varphi_2(\varphi_3(n))=3^{\omega(n)}$ 的全部 20 组正整数解.

参考文献

[1] Cai T X, Fu X D, Zhou X. A congruence involving the quotients of Euler and its application(II)[J]. Acta Arithmetic, 2007, 130(3): 203-214.

[2] 吕志宏. 一个包含 Euler 函数的方程 [J]. 西北大学学报 (自然科学版), 2006(1): 17-20.

[3] 俞洪玲, 沈忠燕. 与广义欧拉函数有关的方程 [J]. 浙江外国语学院学报, 2012(03): 91-97.

[4] 王容, 罗文力, 廖群英. 方程 $\varphi_3(n)=\frac{n}{d}$ 的可解性 [J]. 成都信息工程大学学报, 2017, 32(1): 95-101.

[5] 袁合才, 王晓峰. 关于 Smarandache LCM 函数的数论函数方程 $S(SL(n^{11,12}))=\varphi_2(n)$ 的可解性 [J]. 西南大学学报 (自然科学版), 2018, 40(10): 72-76.

[6] 张四保. 数论函数方程 $\varphi_2(N)=S(N^{16})$ 的可解性 [J/OL]. 重庆理工大学学报 (自然科学):1-9[2019-10-07].http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1205.t.20190509.1336.004.html.

[7] 张四保, 阿克木 · 优力达西. 与广义 Euler 函数 $\varphi_2(n)$ 有关的两个方程 [J]. 东北师大学报 (自然科学版), 2019, 51(2): 7-12.

[8] 张四保. 广义 Euler 函数方程 $\varphi_6(n)=2^{\omega(n)}$ 的解 [J]. 西南师范大学学报 (自然科学版), 2018, 43(2): 36-41.

[9] Kenneth H.Rosen(著). 夏洪刚 (译). 初等数论及其应用 (原书第 6 版)[M]. 北京: 机械工业出版社, 2015.

[10] 蔡天新, 沈忠燕, 胡孟君. 广义欧拉函数的奇偶性 (英文)[J]. 数学进展, 2013, 42(4): 505-510.

The Solvability of Equation $\varphi_2(\varphi_3(\mathbf{n}))=3^{\omega(\mathbf{n})}$

LI Chang-ji

(Tibetan-Chinese Bilingual School, Aba Teachers University, Wenchuan 623002, China)

Abstract: Let $\varphi_e(n)$ be generalized Euler function,the solvability of arithmetic function equation $\varphi_2(\varphi_3(n))=3^{\omega(n)}$ was studied when $e=2$and $e=3$.We give the all its Twenty solutions by using properties of generalized Euler function and elementary methods.

Keywords: generalized Euler function; diophantine equation; positive integer solutions