# 方程 $\varphi_3(n)=S(n)$ 的可解性

李昌吉

(阿坝师范学院 藏汉双语学院, 四川 汶川 623002)

**摘 要**: $\varphi_e(n)$ 为广义 Euler 函数, $S(n)$ 为 Smarandache 函数. 研究了数论函数方程 $\varphi_e(n)=S(n)$ 在 $e=3$ 时的可解性问题. 借助广义 Euler 函数 $\varphi_3(n)$ 和 $S(n)$ 函数的性质, 利用初等方法, 给出方程 $\varphi_3(n)=S(n)$ 的全部正整数解.

**关键词**: 广义 Euler 函数; Smarandache 函数; 不定方程; 正整数解

## 1 引言

Euler 函数和 Smarandache 函数是两类重要的数论函数, 与其相关的不定方程可解性到目前有一定的研究. 广义欧拉函数 $\varphi_e(n)$ 是蔡天新等人引入的函数, 在文献 [1] 中定义 $\varphi_e(n)$ 为序列 1, 2, …, $\left[\frac{n}{e}\right]$ 中与 $n$ 互质的数的个数, 如 $\varphi_3(1)=0$, $\varphi_3(2)=0$, $\varphi_3(3)=1$, $\varphi_3(4)=1$, $\cdots$. 文献 [2-6] 等对不同类型的广义 Euler 函数 $\varphi_e(n)$ 性质做了深入的研究. 著名数论学家 F.Smarandache 在其《Only Problems,Not Solution》一书中定义了 Smarandache 函数 $S(n)$. 函数 $S(n)=\min\{m\in Z^+ \,|n\,|m!\}$ 表示使 $n\,|m!$ 成立的最小正整数 $m$. 很多学者对 Smarandache 函数的性质及应用进行了深入研究, 取得了一些重要的结果, 如文献 [7-11] 等. 文献 [12-16] 对于含有广义欧拉函数与 Smarandache 函数混合的数论函数方程的可解性进行了研究, 其中研究较多的方程类型是 $\varphi_2(n)=S(n^k)$. 本文将讨论 $e=3$ 时的广义欧拉函数与 Smarandache 函数混合的数论函数方程

$$\varphi_3(n)=S(n) \tag{1}$$

的可解性问题, 借助初等方法给出了方程 (1) 的全部正整数解.

## 2 引理

**引理 1**[17] 如果正整数 $n=\prod\limits_{i=1}^{k}p_i^{a_i}$, $p_i$ 是素数, $a_i\in N$, 那么 $\varphi(n)=\prod\limits_{i=1}^{k}p_i^{a_i-1}(p_i-1)$.

**引理 2**[17] 设 $n$ 是正整数, 则 $\varphi(1)=1$, $\varphi(2)=1$, 当 $n\geq 3$ 时 $2|\varphi(n)$.

**引理 3**[18] 如果正整数 $n=\prod\limits_{i=1}^{k}p_i^{a_i}$, $p_i$ 是素数, $a_i\in N$, 那么 $S(n)=\max\{S(p_1^{a_1}),S(p_2^{a_2}), \cdots,S(p_k^{a_k})\}$.

**引理 4**[19] 对于素数 $p$ 和正整数 $k$, 有 $(p-1)k+1\leq \mathrm{S}(p^k)\leq kp$; 如果 $k<p$, 那么 $\mathrm{S}(p^k)=kp$.

**收稿日期**: 2020-04-11
**资助项目**: 四川省应用基础研究项目 (2018JY0458); 阿坝师范学院科研项目 (20170101, 201803005, ASA20-06)

**引理 5**[2] 设 $n=3^{\alpha}\prod\limits_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}>3$, 其中 $k\geq 1$, $\alpha\geq 0$, $\alpha_i\geq 1$, $p_i$ 是不同的素数且 $(p_i,3)=1\ (\forall i=1,\cdots,k)$, 则 $\varphi_3(n)=\begin{cases}\frac{\varphi(n)}{3}+\frac{(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-\alpha-1}}{3}, & \alpha\in\{0,1\} \text{ 且 } p_i\equiv 2(\bmod 3)(1\leq i\leq k)\\ \frac{\varphi(n)}{3}, & \text{其他}\end{cases}$

其中, $\Omega(n)=\alpha+\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i$ 当 $\alpha=0$ 时, $\omega(n)=k$; 当 $\alpha\geq 1$ 时,$\omega(n)=k+1$. 并规定 $\omega(1)=\Omega(1)=0$.

## 3 定理及其证明

**定理 1** 方程 (1) 的全部正整数解为 $n=49, 98$.

**证明** 由引理 3 如果正整数 $n=\prod\limits_{i=1}^{k}p_i^{a_i}$, $p_i$ 是素数, $a_i\in N$, 不妨假设 $S(n)=\max\{S(p_1^{a_1}),S(p_2^{a_2}),\cdots,S(p_k^{a_k})\}=S(p^a)$, 则方程 (1) 化为

$$\varphi_3(n)=S(p^a) \tag{2}$$

以及

$$S(n)=S(p^a) \tag{3}$$

所以, 满足 (2),(3) 同时成立的解即为方程 (1) 的解.

易知 $n=$1,2, 3 不是方程 (1) 的解, 下面根据引理 5 中 $\varphi_3(n)$ 的计算公式进行分类讨论:

**情形 1** 当 $\alpha=0$, $p_i\equiv 2(\bmod 3)(1\leq i\leq t)$ 时, 假设 $S(n)=S(p^a)$, 且 $n=p^a\prod\limits_{i=1}^{t}p_i^{\alpha_i}$, (其中 $(p,p_i)=1$, $p\equiv 2(\bmod 3)$), 由引理 5 知

$$\begin{aligned}\varphi_3(n)=&\frac{\varphi(n)}{3}+\frac{(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-1}}{3}=\frac{1}{3}p^{a-1}(p-1)\prod_{i=1}^{t}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+\frac{(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-1}}{3}\\=&\frac{1}{3}(p^{a-1}(p-1)\prod_{i=1}^{t}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-1})\end{aligned}$$

即

$$\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(p^{a-1}(p-1)\prod_{i=1}^{t}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-1})$$

则方程 (2) 可化为

$$p^{a-1}(p-1)\prod_{i=1}^{t}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-1}=3S(p^a) \tag{4}$$

1) 若 $\omega(n)=1$ 时, 假设 $n=p^a$,

①当 $a=1$, 有 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}((p-1)-1)$, $S(p^a)=p$, 则方程 (4) 整理为 $p-2=3p$, 显然 $p$ 无解, 所以此时方程 (1) 无解.

②当 $a=2$, 有 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(p(p-1)+1)$, 由引理 4 知 $2(p-1)+1\leq\frac{1}{3}(p(p-1)-1)\leq 2p$, 即 $6p-4\leq p(p-1)\leq 6p-1$, 满足此条件成立的素数 $p$ 不存在, 所以此时方程 (1) 无解.

③当 $a=3$, 有 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(p^2(p-1)-1)$, 由引理 4 知 $3(p-1)+1\leq\frac{1}{3}(p^2(p-1)-1)\leq 3p$, 即 $9p-5\leq p^2(p-1)\leq 9p+1$, 满足此条件成立的素数 $p$ 不存在, 所以此时方程 (1) 无解.

④当 $a=4$, 有 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(p^3(p-1)+1)$, 由引理 4 知 $4(p-1)+1\le\frac{1}{3}(p^3(p-1)+1)\le 4p$, 即 $12p-10\le p^3(p-1)\le 12p-1$, 满足此条件成立的素数 $p$ 不存在, 所以此时方程 (1) 无解.

⑤当 $a=5$, 有 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(p^4(p-1)-1)$, 由引理 4 知 $5(p-1)+1\le\frac{1}{3}(p^4(p-1)-1)\le 5p$, 即 $15p-11\le p^4(p-1)\le 15p+1$, 满足此条件成立的素数 $p$ 不存在, 所以此时方程 (1) 无解.

⑥当 $a=6$, 有 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(p^5(p-1)+1)$, 由引理 4 知 $6(p-1)+1\le\frac{1}{3}(p^5(p-1)+1)\le 6p$, 即 $12p-8\le p^5(p-1)\le 12p+1$, 满足此条件成立的素数 $p$ 不存在, 所以此时方程 (1) 无解.

⑦当 $a\ge 7$, 有 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(p^{a-1}(p-1)+(-1)^{\Omega(n)})$, 由引理 4 知 $\frac{1}{3}(p^{a-1}(p-1)+(-1)^{\Omega(n)})\le ap$, 即 $p^{a-1}(p-1)\le 3ap+1$, 令 $f(p)=p^{a-1}(p-1)-3ap-1$, 易知 $f'(p)=(a-1)p^{a-2}(p-1)+p^{a-1}-3a=ap^{a-2}(p-1)+p^{a-2}-3a>0$, 又 $f(2)=2^{a-1}-6a+1>0$, 所以有 $f(p)=p^{a-1}(p-1)-3ap-1>0$, 即 $p^{a-1}(p-1)>3ap+1$, 产生矛盾, 因此满足此条件成立的素数 $p$ 不存在, 所以此时方程 (1) 无解.

2) 若 $\omega(n)=2$ 时, 假设 $n=p^a p_1^{a_1}((p,p_1)=1)$,

①当 $a=1$, 有 $S(p^a)=p$, 则方程 (4) 整理为 $(p-1)p_1^{a_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 2=3p$, 则

i) 若 $p=2$, 则 $p_1^{a_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 2=6$, 易得 $p_1=5$, $a_1=1$, 则 $n=2\cdot 5=10$. 经检验, $S(2)=2$, $S(5)=5$, 由引理 3 得 $S(n)=S(10)=max\{S(2),S(5)\}=5$, 所以 $S(10)\ne S(2^3)$, 方程 (3) 不成立, 所以此时方程 (1) 无解.

ii) 若 $p\ge 5$, 则方程 (4) 化为 $(p-1)p_1^{a_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 2=3p$, 易知此方程的左边为偶数, 右边为奇数, 因此方程 (4) 不成立, 所以此时方程 (1) 无解.

②当 $a=2$,

i) 若 $p=2$, 则 $S(p^a)=S(2^2)=4$, 方程 (4) 化为 $p_1^{a_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)}=6$, 满足此条件成立的 $p_1$, $a_1$ 不存在, 所以此时方程 (1) 无解.

ii) 若 $p\ge 5$, 则 $S(p^a)=2p$, 方程 (4) 整理为 $p(p-1)p_1^{a_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 2=6p$, 而 $p(p-1)p_1^{a_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 2\ge 4p\pm 1>3p$, 产生矛盾, 所以方程 (4) 无解, 所以此时方程 (1) 无解.

③当 $a=3$, 有 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(p^2(p-1)p_1^{a_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 2)$, 由引理 4 知 $3(p-1)+1\le\frac{1}{3}(p^2(p-1)p_1^{a_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 2)\le 3p$ 即 $9p-6\le p^2(p-1)p_1^{a_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 2)\le 9p$, 此时仅有 $p=2$, $p_1=5$, $a_1=1$ 满足该不等式, 则 $n=2^3\cdot 5=40$. 经检验, $S(2^3)=4$, $S(5)=5$, 由引理 3 得 $S(n)=S(40)=\max\{S(2^3),S(5)\}=5$, 所以 $S(40)\ne S(2^3)$, 方程 (3) 不成立, 所以此时方程 (1) 无解.

④当 $a\ge 4$, 由引理 4 知 $\varphi_3(n)=S(p^a)\le ap$, 即 $p^{a-1}(p-1)p_1^{a_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 2\le 3ap$. 令 $f(p)=p^{a-1}(p-1)p_1^{a_1-1}(p_1-1)+2(-1)^{\Omega(n)}-3ap$, 则有

$$\begin{aligned}f'(p)=&(ap^{a-2}(p-1)+p^{a-2})p_1^{a_1-1}(p_1-1)-3a\\ \ge& ap^{a-2}(p-1)+p^{a-2}-3a\ge 4a+p^{a-2}-3a>0\end{aligned}$$

又 $f(2)=2^{a-1}p_1^{a_1-1}(p_1-1)+2(-1)^{\Omega(n)}-6a\ge 2^{a-1}\cdot 3+2^{a-1}+2(-1)^{\Omega(n)}-6a\ge 6(2^{a-2}-a)+8+2(-1)^{\Omega(n)}>0$, 所以 $f(p)>0$, 即 $p^{a-1}(p-1)p_1^{a_1-1}(p_1-1)+2(-1)^{\Omega(n)}>3ap$, 产生矛盾, 所以此时方程 (1) 无解.

3) 若 $\omega(n)=3$ 时, 有 $n=p^a\prod_{i=1}^{2}p_i^{a_i}((p,p_i)=1,\ i=1,2)$,

①当 $a=1$, 有 $S(p^a)=p$, 则方程 (4) 整理为 $(p-1)\prod_{i=1}^{2}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 4=3p$, 则

i) 若 $p=2$, 有 $\prod_{i=1}^{2}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 4=6$, 而 $\prod_{i=1}^{2}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 4\geq 40-4=36$, 产生矛盾, 因此方程 (4) 不成立, 所以此时方程 (1) 无解.

ii) 若 $p\geq 5$, 则方程 (4) 化为 $(p-1)\prod_{i=1}^{2}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 4=3p$, 易知此方程的左边为偶数, 右边为奇数, 因此方程 (4) 不成立, 所以此时方程 (1) 无解.

②当 $a=2$,

i) 若 $p=2$, 则 $S(p^a)=S(2^2)=4$, 方程 (4) 化为 $\prod_{i=1}^{2}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 2=6$, 而 $\prod_{i=1}^{2}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 2\geq 40-2=38$, 产生矛盾, 因此方程 (4) 不成立, 所以此时方程 (1) 无解.

ii) 若 $p\geq 5$, 则 $S(p^a)=2p$, 方程 (4) 整理为 $p(p-1)\prod_{i=1}^{2}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 4=6p$, 而 $p(p-1)\prod_{i=1}^{2}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 4\geq 40p+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 4>39p>6p$, 产生矛盾, 所以方程 (4) 无解, 所以此时方程 (1) 无解.

③当 $a\geq 3$, 有 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(p^{a-1}(p-1)\prod_{i=1}^{2}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 4)$, 由引理 4 知 $\frac{1}{3}(p^{a-1}(p-1)\prod_{i=1}^{2}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 4)\leq ap$ 即 $p^{a-1}(p-1)\prod_{i=1}^{2}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+4(-1)^{\Omega(n)})\leq 3ap$.

令 $f(p)=p^{a-1}(p-1)\prod_{i=1}^{2}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+4(-1)^{\Omega(n)})-3ap$, 则有 $f'(p)=(ap^{a-2}(p-1)+p^{a-2})\prod_{i=1}^{2}p_i^{a_i-1}(p_i-1)-3a\geq 4ap^{a-2}(p-1)+4p^{a-2}-3a\geq 8a+4p^{a-2}-3a>0$, 又 $f(2)=2^{a-1}\prod_{i=1}^{2}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+4(-1)^{\Omega(n)}-6a\geq 2^{a-1}\cdot 40+4(-1)^{\Omega(n)}-6a>2^{a-1}\cdot 36-6a>6(2^{a-1}\cdot 6-a)>0$, 所以 $f(p)>0$, 即 $p^{a-1}(p-1)\prod_{i=1}^{2}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+4(-1)^{\Omega(n)}>3ap$, 产生矛盾, 因此方程 (4) 无解, 所以此时方程 (1) 无解.

4). 若 $\omega(n)\geq 4$ 时, 设 $n=p^a\prod_{i=1}^{t}p_i^{a_i}((p,p_i)=1,\ i=1,2,3,\cdots,t)$, 则

①当 $a=1$, 有 $S(p^a)=p$, 则方程 (4) 整理为 $(p-1)\prod_{i=1}^{t}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-1})=3p$, 则此方程的左边是偶数, 右边是奇数, 产生矛盾, 因此方程 (4) 无解, 所以此时方程 (1) 无解.

②当 $a\geq 2$, 有 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(p^{a-1}(p-1)\prod_{i=1}^{t}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-1})$, $S(p^a)\leq ap$, 则由引理 4 知 $\frac{1}{3}(p^{a-1}(p-1)\prod_{i=1}^{t}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-1})\leq ap$ 即 $p^{a-1}(p-1)\prod_{i=1}^{t}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-1}\leq 3ap$,

令 $f(p)=p^{a-1}(p-1)\prod_{i=1}^{t}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-1}-3ap$, 易知 $f'(p)=p^{a-2}(ap-$

$a+1)\prod_{i=1}^{k}p_i^{a_i-1}(p_i-1)-3a>0$, 又

$$\begin{aligned}f(2)=&2^{\omega(n)-1}(2^{a-1}\prod_{i=1}^{t}p_i^{a_i-1}\frac{(p_i-1)}{2}+(-1)^{\Omega(n)})-6a\\ \geq&2^{\omega(n)-1}(2^{a-1}\cdot 40+(-1)^{\Omega(n)})-6a>36\cdot 2^{\omega(n)-1}2^{a-1}-6a\\ >&6(2^{\omega(n)+a-2}-a)>0\end{aligned}$$

所以 $f(p)>0$, 即 $p^{a-1}(p-1)\prod_{i=1}^{t}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-1}>3ap$, 产生矛盾, 所以此时方程 (1) 无解.

**情形 2** 当 $\alpha=1$ 且 $p_i\equiv 2(\mathrm{mod}3)(1\leq i\leq h)$, 设 $n=3p^a\prod_{i=1}^{h}p_i^{\alpha_i}(p\equiv 2(\mathrm{mod}3)$, $(p,3)=1$, $(p_i,3)=1$, ) 时, 由引理 5 知

$$\begin{aligned}\varphi_3(n)=&\frac{\varphi(n)}{3}+\frac{(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-2}}{3}=\frac{1}{3}\cdot 2p^{a-1}(p-1)\prod_{i=1}^{h}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+\frac{(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-2}}{3}\\ =&\frac{1}{3}(2p^{a-1}(p-1)\prod_{i=1}^{h}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-2})\end{aligned}$$

即

$$\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(2p^{a-1}(p-1)\prod_{i=1}^{h}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-2})$$

则方程 (1) 可化为

$$2p^{a-1}(p-1)\prod_{i=1}^{h}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-2}=3S(p^a)\tag{5}$$

1) 若 $\omega(n)=1$ 时, 有 $n=3$, 显然不是方程 (1) 的解.

2) 若 $\omega(n)=2$ 时, 有 $n=3p^a$, 易知 $S(n)=S(p^a)$ 成立, 与题设一致. 否则当 $S(n)=S(3)=3$ 时, 由引理 3 知 $S(n)=max\{S(3),S(p^a)\}=S(3)=3$, 此时仅有 $p=2$, $a=1$ 符合题意, 所以 $n=6$, 而 $\varphi_3(6)=1$, 显然 $\varphi_3(6)\neq S(6)$, 因此 $S(n)\neq S(3)$.

① 当 $a=1$, 有 $S(p^a)=p$, 则方程 (5) 整理为 $2(p-1)+1=3p$, 解得 $p=-1$, 与 $p$ 为质数矛盾, 所以此时方程 (1) 无解.

② 当 $a=2$, 有 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(2p(p-1)-1)$,

i) 若 $p=2$, 则 $\varphi_3(n)=1$, $S(p^a)=S(2^2)=4$, 显然 $\varphi_3(n)\neq S(p^a)$, 因此方程 (2) 不成立, 所以此时方程 (1) 无解.

ii) 若 $p\geq 5$, 由引理 4 得 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(2p(p-1)-1)\leq 2p$, 即 $2p^2-8p-1\leq 0$, 而当 $p\geq 5$ 时 $p(2p-8)-1>0$ 显然成立, 产生矛盾, 所以此时方程 (1) 无解.

③ 当 $a=3$, 有 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(2p^2(p-1)+1)$,

i) 若 $p=2$, 则 $\varphi_3(n)=3$, $S(p^a)=S(2^3)=4$, 显然 $\varphi_3(n)\neq S(p^a)$, 因此方程 (2) 不成立, 所以此时方程 (1) 无解.

ii) 若 $p\geq 5$, 由引理 4 得 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(2p^2(p-1)+1)\leq 3p$, 即 $2p^3-2p^2-9p+1\leq 0$, 而当 $p\geq 5$ 时, $2p^3-2p^2-9p+1=p(2p(p-1)-9)+1>0$ 显然成立, 产生矛盾, 所以此时方程 (1) 无解.

④ 当 $a=4$, 有 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(2p^3(p-1)-1)$,

i) 若 $p=2$, 则 $\varphi_3(n)=5$, $S(p^a)=S(2^4)=6$, 显然 $\varphi_3(n)\neq S(p^a)$, 因此方程 (2) 不成立, 所以此时方程 (1) 无解.

ii) 若 $p\geq 5$, 由引理 4 得 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(2p^3(p-1)-1)\leq 4p$, 即 $2p(p^2(p-1)-6)-1\leq 0$, 而当 $p\geq 5$ 时, $2p(p^2(p-1)-6)-1>0$ 显然成立, 产生矛盾, 所以此时方程 (1) 无解.

⑤ 当 $a\geq 5$, $p\geq 2$, 有 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(2p^{a-1}(p-1)+(-1)^{\Omega(n)})$, 由引理 4 得 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(2p^{a-1}(p-1)+(-1)^{\Omega(n)})\leq ap$, 即 $2p^a-2p^{a-1}-3ap+(-1)^{\Omega(n)}\leq 0$. 令 $f(p)=2p^a-2p^{a-1}-3ap+(-1)^{\Omega(n)}$, 易知 $f'(p)=2ap^{a-1}-2(a-1)p^{a-2}-3a=a(2p^{a-2}(p-1)-3)+2p^{a-2}>0$, 且 $f(2)=2^a-6a+(-1)^{\Omega(n)}>0$ 显然成立, 所以 $f(p)=2p^a-2p^{a-1}-3ap+(-1)^{\Omega(n)}>0$, 即 $f(p)=2p^a-2p^{a-1}+(-1)^{\Omega(n)}>3ap$, 产生矛盾, 所以此时方程 (1) 无解.

3) 若 $\omega(n)=3$ 时, 有 $n=3p^ap_1^{a_1}(3,p,p_1$ 两两互素, $i=1,2)$, 与情形 2 的 2) 中讨论同理知 $S(n)\neq S(3)$, 因此设 $S(n)=S(p^a)$,

① 当 $a=1$, 有 $S(p^a)=p$, 则方程 (5) 整理为 $2((p-1)p_1^{a_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)})=3p$, 则此方程的左边是偶数, 因此 $p=2$, 而此时有 $S(p^a)=S(2)=2$, $S(3)=3$, 则有 $S(p^a)<S(3)$, 与题设不符, 所以此时方程 (1) 无解.

② 当 $a=2$, 有 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(2p(p-1)p_1^{a_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-2})$,

i) 若 $p=2$, 则 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(4p_1^{a_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 2)$, $S(p^a)=S(2^2)=4$, 则方程 (5) 整理为 $2p_1^{a_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)}=6$, 因为此方程的左边是奇数, 右边是偶数, 显然此方程无解, 即方程 (2) 不成立, 所以此时方程 (1) 无解.

ii) 若 $p\geq 5$, 由引理 4 得 $S(p^a)=2p$, 则方程 (5) 整理为 $p(p-1)p_1^{a_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)}=3p$, 而 $p(p-1)p_1^{a_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)}\geq 4p+(-1)^{\Omega(n)}>3p$, 产生矛盾, 即方程 (5) 不成立, 所以此时方程 (1) 无解.

③ 当 $a=3$, 有 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(2p^2(p-1)p_1^{a_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 2)$,

i) 若 $p=2$, 则 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(8p_1^{a_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 2)$, $S(p^a)=S(2^3)=4$, 则方程 (5) 整理为 $4p_1^{a_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)}=6$, 因为此方程的左边是奇数, 右边是偶数, 显然此方程无解, 即方程 (5) 不成立, 所以此时方程 (1) 无解.

ii) 若 $p\geq 5$, 由引理 4 得 $S(p^a)=3p$, 方程 (5) 整理为 $2p^2(p-1)p_1^{a_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 2=9p$, 因为此方程的左边是奇数, 右边是偶数, 显然此方程无解, 即方程 (5) 不成立, 所以此时方程 (1) 无解.

④ 当 $a\geq 4$, $p\geq 2$,

由引理 4 得 $S(p^a)\leq ap$, 方程 (5) 整理为 $2p^{a-1}(p-1)p_1^{a_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 2\leq 3ap$, 令 $g(a)=2p^{a-1}(p-1)p_1^{a_1-1}(p_1-1)-3ap+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 2$, 则 $g'(a)=2p^{a-1}\ln(a-1)(p-1)p_1^{a_1-1}(p_1-1)-3p$, 显然 $g'(a)\geq 8p^{a-1}-3p>0$ 且 $g(4)=2p^3(p-1)p_1^{a_1-1}(p_1-1)-12p+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 2\geq 8p^3-12p+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 2>0$, 所以 $g(a)>0$, 即 $2p^{a-1}(p-1)p_1^{a_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 2>3ap$, 产生矛盾, 所以此时方程 (1) 无解.

4) 若 $\omega(n)=4$ 时, 有 $n=3p^a\prod\limits_{i=1}^{2}p_i^{\alpha_i}(3,p,p_i$ 两两互素, $i=1,2)$, 与情形 2 的 2) 中讨论同理知 $S(n)\neq S(3)$, 因此设 $S(n)=S(p^a)$,

① 当 $a=1$, 有 $S(p^a)=p$, 则方程 (5) 整理为 $2((p-1)\prod\limits_{i=1}^{2}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 4)=3p$, 则此方程的左边是偶数, 因此 $p=2$, 与情形 2 的 3) 中讨论同理知此时方程 (1) 无解.

② 当 $a=2$,

i) 若 $p=2$, 有 $S(p^a)=S(2^2)=4$, 则方程 (5) 整理为 $\prod\limits_{i=1}^{2}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}=3$, 易知此方程无解, 即方程 (5) 不成立, 所以此时方程 (1) 无解.

ii) 若 $p\geq 5$, 由引理 4 得 $S(p^a)=2p$, 则方程 (5) 整理为 $p(p-1)\prod\limits_{i=1}^{2}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 2=3p$, 而 $p(p-1)\prod\limits_{i=1}^{2}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 2\geq 40p+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 2>3p$, 产生矛盾, 即方程 (5) 不成立, 所以此时方程 (1) 无解.

③ 当 $a\geq 3$, $p\geq 2$, 由引理 4 得 $S(p^a)\leq ap$, 则方程 (5) 整理为 $2p^{a-1}(p-1)\prod\limits_{i=1}^{2}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 4\leq 3ap$, 令 $g(a)=2p^{a-1}(p-1)\prod\limits_{i=1}^{2}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 4-3ap$, 则 $g'(a)=2p^{a-1}\ln(a-1)(p-1)\prod\limits_{i=1}^{2}p_i^{a_i-1}(p_i-1)-3p> \quad p^2(\ln^2 2)\cdot 40-3p>0$ 且 $g(3)=2p^2(p-1)\prod\limits_{i=1}^{2}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 4-9p\geq 80p^2+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 4-9p>0$, 所以 $g(a)>0$, 即 $2p^{a-1}(p-1)\prod\limits_{i=1}^{2}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot 4>3ap$, 产生矛盾, 所以此时方程 (1) 无解.

5) 若 $\omega(n)\geq 5$ 时, 有 $n=3p^a\prod\limits_{i=1}^{h}p_i^{\alpha_i}(3,p,p_i$ 两两互素, $i=1,2,\cdots,h$, $h\geq 3)$, 与情形 2 的 2) 中讨论同理知 $S(n)\neq S(3)$, 因此设 $S(n)=S(p^a)$, 此时

$$
\begin{aligned}
\varphi_3(n)=&\frac{1}{3}(2p^{a-1}(p-1)\prod_{i=1}^{h}p_i^{a_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-2})\\
=&\frac{1}{3}(2p^{a-1}(p-1)\cdot 2^{\omega(n)-2}\prod_{i=1}^{h}p_i^{a_i-1}\prod_{i=1}^{h}\frac{(p_i-1)}{2}+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-2})\\
=&\frac{1}{3}\cdot 2^{\omega(n)-2}(2p^{a-1}(p-1)\prod_{i=1}^{h}p_i^{a_i-1}\prod_{i=1}^{h}\frac{(p_i-1)}{2}+(-1)^{\Omega(n)})
\end{aligned}
$$

① 当 $a=1$, 有 $S(p^a)=p$, 则方程 (5) 整理为 $2^{\omega(n)-2}(2(p-1)\prod\limits_{i=1}^{h}p_i^{a_i-1}\prod\limits_{i=1}^{h}\frac{(p_i-1)}{2}+(-1)^{\Omega(n)})=3p$, 则此方程的左边是偶数, 因此 $p=2$, 与情形 2 的 3) 中讨论同理知此时方程 (1) 无解.

② 当 $a\geq 2$, $p\geq 2$, 由引理 4 得 $S(p^a)\leq ap$, 则方程 (5) 整理为 $2^{\omega(n)-2}(2p^{a-1}(p-1)\prod\limits_{i=1}^{h}p_i^{a_i-1}\prod\limits_{i=1}^{h}\frac{(p_i-1)}{2}+(-1)^{\Omega(n)})\leq 3ap$,

又 $2^{\omega(n)-2}(2p^{a-1}(p-1)\prod\limits_{i=1}^{h}p_i^{a_i-1}\prod\limits_{i=1}^{h}\frac{(p_i-1)}{2}+(-1)^{\Omega(n)})\geq 2^3(4p^{a-1}\cdot\frac{(p-1)}{2}\prod\limits_{i=1}^{h}\frac{(p_i-1)}{2}+(-1)^{\Omega(n)})\geq 2^3(4p^{a-1}\cdot 40+(-1)^{\Omega(n)})\geq 1280p^{a-1}-8$. 令 $f(p)=1280p^{a-1}-8-3ap$, 则 $f'(p)=1280(a-1)p^{a-2}-3a=(a-1)(1280p^{a-2}-3)-3>0$, 且 $f(2)=1280\cdot 2^{a-1}-8-6a>0$, 所以 $f(p)>0$, 即 $1280p^{a-1}-8>3ap$, 所以 $2^{\omega(n)-2}(2p^{a-1}(p-1)\prod\limits_{i=1}^{h}p_i^{a_i-1}\prod\limits_{i=1}^{h}\frac{(p_i-1)}{2}+(-1)^{\Omega(n)})>$

$3ap$, 产生矛盾, 所以此时方程 (1) 无解.

**情形 3** 其他情况, 设 $n=p^a n_1((p^a,n_1)=1)$, 由引理 5 知

$$\varphi_3(n)=\frac{1}{3}\varphi(n)=\frac{1}{3}p^{a-1}(p-1)\varphi(n_1),$$

则方程 (2) 化为

$$p^{a-1}(p-1)\varphi(n_1)=3S(p^a) \tag{6}$$

1) 若 $a=1$ 时, 有 $S(p^a)=p$, 方程 (6) 整理为 $(p-1)\varphi(n_1)=3p$, 则 $(p-1)|3p$, 所以 $p=2$, 所以 $\varphi(n_1)=6$, 易得 $n_1$ =7,9,14,18. 因为 $(p^a,n_1)=1$, 所以 $n_1$ =7,9, 则 $n$ =14,18. 经检验 $n=14=2\times 7$, $S(2)=2$, $S(7)=7$, $S(14)=max\{S(2),S(7)\}=7\neq S(2)$, 即方程 (3) 不成立, 所以 $n=14$ 不是方程 (1) 的解. 同理可得 $n=18$ 不是方程 (1) 的解.

2) 若 $a=2$ 时,

① 当 $p=2$, 则 $S(p^a)=S(2^2)=4$, 方程 (6) 整理为 $\varphi(n_1)=6$, 易得 $n_1$ =7,9,14,18. 因为 $(p^a,n_1)=1$, 所以 $n_1$ =7,9, 则 $n$ =28,36. 经检验 $n$ =28,36 不是方程 (1) 的解.

② 当 $p\geq 3$, 则由引理 4 知 $S(p^a)=2p$, 方程 (6) 整理为 $p(p-1)\varphi(n_1)=6p$, 即 $(p-1)\varphi(n_1)=6$, 易得 $p=2$, $\varphi(n_1)=6$(此情况上一问中已讨论) 或 $p=7$, $\varphi(n_1)=1$. 又 $n_1=1,2$, 所以 $n=49,98$.

i) $n=49=7^2$ 时, $S(n)=S(49)=14=S(7^2)=S(p^a)$, 即方程 (3) 成立, 所以 $n=49$ 是方程 (1) 的解. $n=98$ 是方程 (1) 的解.

ii) $n=98=2\times 7^2$ 时, $S(2)=2$, $S(7^2)=14$, $S(n)=S(98)=max\left\{S(2),S(7^2)\right\}=14$, $S(p^a)=S(7^2)=14$, 所以 $S(n)=S(p^a)$, 即方程 (3) 成立, 所以 $n=98$ 是方程 (1) 的解.

3) 若 $a=3$ 时,

① 当 $p=2$, 则 $S(p^a)=S(2^3)=4$, 方程 (6) 整理为 $\varphi(n_1)=3$, 由引理 2 知这样的 $n_1$ 不存在, 所以此时方程 (1) 无解.

② 当 $p=3$, 则 $S(p^a)=S(3^3)=9$, 方程 (6) 整理为 $\varphi(n_1)=\frac{3}{2}$, 由引理 2 知这样的 $n_1$ 不存在, 所以此时方程 (1) 无解.

③ 当 $p\geq 5$, 则由引理 4 知 $S(p^a)=3p$, 方程 (6) 整理为 $p(p-1)\varphi(n_1)=9$, 易知这样的 $p$ 和 $n_1$ 不存在, 所以此时方程 (1) 无解.

4) 若 $a=4$ 时,

① 当 $p=2$, 则 $S(p^a)=S(2^4)=6$, 方程 (6) 整理为 $\varphi(n_1)=\frac{9}{4}$, 由引理 2 知这样的 $n_1$ 不存在, 所以此时方程 (1) 无解.

② 当 $p=3$, 则 $S(p^a)=S(3^4)=9$, 方程 (6) 整理为 $\varphi(n_1)=\frac{1}{2}$, 由引理 2 知这样的 $n_1$ 不存在, 所以此时方程 (1) 无解.

③ 当 $p\geq 5$, 则由引理 4 知 $S(p^a)=4p$, 方程 (6) 整理为 $p^2(p-1)\varphi(n_1)=12$, 易知这样的 $p$ 和 $n_1$ 不存在, 所以此时方程 (1) 无解.

5) 若 $a=5$ 时,

① 当 $p=2$, 则 $S(p^a)=S(2^5)=8$, 方程 (6) 整理为 $\varphi(n_1)=\frac{3}{2}$, 由引理 2 知这样的 $n_1$ 不存在, 所以此时方程 (1) 无解.

② 当 $p\ge 3$, 则由引理 4 知 $S(p^a)\le 5p$, 方程 (6) 整理为 $p^{a-1}(p-1)\varphi(n_1)\le 15p$, 即 $p^{a-2}(p-1)\varphi(n_1)\le 15$, 而此时有 $p^{a-2}(p-1)\varphi(n_1)\ge 3^3\cdot 2>15$, 产生矛盾, 所以此时方程 (1) 无解

6) 若 $a=6$ 时,

① 当 $p=2$, 则 $S(p^a)=S(2^6)=8$, 方程 (6) 整理为 $\varphi(n_1)=\frac{3}{4}$, 由引理 2 知这样的 $n_1$ 不存在, 所以此时方程 (1) 无解.

② 当 $p\ge 3$, 则由引理 4 知 $S(p^a)\le 6p$, 方程 (6) 化为 $p^{a-1}(p-1)\varphi(n_1)\le 18p$, 即 $p^{a-2}(p-1)\varphi(n_1)\le 18$, 而此时有 $p^{a-2}(p-1)\varphi(n_1)\ge 3^4\cdot 2>18$, 产生矛盾, 所以此时方程 (1) 无解

7) 若 $a\ge 7$, $p\ge 2$ 时,

由引理 4 知 $S(p^a)\le ap$, 方程 (6) 化为 $p^{a-1}(p-1)\varphi(n_1)\le 3ap$, 即 $p^{a-2}(p-1)\varphi(n_1)\le 3a$. 令 $g(a)=p^{a-2}(p-1)\varphi(n_1)-3a$, 则 $g'(a)=p^{a-2}\ln(a-2)(p-1)\varphi(n_1)-3>2^4-3>0$ 且 $g(7)=p^5(p-1)\varphi(n_1)-21\ge 2^5-21>0$, 所以 $g(a)=p^{a-2}(p-1)\varphi(n_1)-3a>0$, 即 $p^{a-2}(p-1)\varphi(n_1)>3a$, 产生矛盾, 所以此时方程 (1) 无解.

综上所述, 命题得证.

## 4　结论

研究了含有广义 Euler 函数的不定方程 $\varphi_3(n)=S(n)$, 其中 $n$ 为正整数, 结合广义 Euler 函数 $\varphi_3(n)$ 和 Smarandache 函数 $S(n)$ 的性质, 利用初等方法通过分类讨论给出方程 $\varphi_3(n)=S(n)$ 的全部正整数解 $n=49,98$. 对于形如 $\varphi_3(n)=S(n^k)$ 的方程的可解性研究有一定的参考意义.

### 参考文献

[1] Cai T X, Fu X D, Zhou X. A congruence involving the quotients of Euler and its application(II). Acta Arithmetic, 2007, 130(3): 203-214.
[2] 蔡天新, 沈忠燕, 胡孟君. 广义欧拉函数的奇偶性 (英文)[J]. 数学进展, 2013, 42(4): 505-510.
[3] 沈忠燕, 蔡天新, 胡孟君. 广义欧拉函数的奇偶性 (II)(英文)[J]. 数学进展, 2016, 45(4): 509-519.
[4] 王容, 廖群英. 关于广义欧拉函数 _5(n)[J]. 四川师范大学学报 (自然科学版), 2018, 41(4): 445-449.
[5] 廖群英. 一类广义欧拉函数的准确计算公她 J]. 四川师范大学学报 (自然科学版), 2019, 42(3): 354-357.
[6] 周健, 张四保. 广义 Euler 函数 _7(N) 的计算公式 [J]. 数学的实践与认识, 2019, 49(7): 294-298.
[7] 张文鹏. 关澡. Smarandache 函数的两个问题 [J]. 西北大学学报 (自然科学版), 2008(2): 173-176.
[8] 李粉菊, 杨畅宇. 关于 Smarandache 函数的一个下界估计 [J]. 西北大学学报 (自然科学版), 2011, 41(3): 377-379.
[9] 刘妙华, 金英. Fermat 数的 Smarandache 函数值的下界 [J]. 数学的实践与认识, 2015, 45(8): 283-286.
[10] 冀永强. 硝 marandache 函数的上下界 [J]. 数学的实践与认识, 2016, 46(1): 275-279.
[11] 白海荣, 廖群英. Smarandache 函数的一些推广 [J]. 四川师范大学学报 (自然科学版), 2018, 41(1): 32-38.
[12] 俞洪玲, 沈忠燕. 与广义欧拉函数有关的方程 [J]. 浙江外国语学院学报, 2012(3): 91-97.
[13] 许宏鑫, 赵西卿, 张利霞. 关于数论函数方程 _2(n) = S(n ~8) 的解 [J]. 江汉大学学报 (自然科学版), 2016, 44(4): 321-326.

[14] 袁合才, 王波. 广义欧拉函数方程 $_2$(n)=S(n~(22)) 的正整数解 [J]. 宝鸡文理学院学报 (自然科学版), 2018, 38(4): 1-4.

[15] 张四保. 数论函数方程 $_2(N) = S(N \sim(16))$ 的可解性 [J/OL]. 重庆理工大学学报 (自然科学):1-9[2019-06-06].http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1205.t.20190509.1336.004.html.

[16] 白海荣, 廖群英. Smarandache 函数的几类相关方程的解 [J]. 数学学报 (中文版), 2019, 62(2): 247-254.

[17] 闵嗣鹤, 严士健 (著). 初等数论 (第 3 版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003: 58-64.

[18] Farris M, Mitchell P. Bounding the Smarandache function [J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 37-42.

# The Solvability of the Equation $\varphi_3(n) = S(n)$

LI Chang-ji

(Tibetan-Chinese Bilingual School, Aba Teachers University, Wenchuan 623002, China)

**Abstract:** Let $_e(n)$ is the generalized Euler function, $S(n)$ is the Smarandache function.The solvability of the arithmetic function equation $_3(n) = S(n)$ has been studied.We give all the positive solutions of the equation by using the properties of the generalized Euler function $_3(n)$ and the Smarandache function $S(n)$ with elementary methods.

**Keywords:** generalized Euler function; Smarandache function; Diophantine Equation; positive integer solutions