doi:10.3969/j.issn.1000－2162.2022.04.004

方程 $Z\omega(n)=\sum_{d\mid n}S(d)$ 的可解性

李昌吉
(阿坝师范学院 藏汉双语学院,四川 汶川 623002)

摘　要: $Z\omega(n)$ 是伪 Smarandache 无平方因子函数,$S(n)$ 为 Smarandache 函数.结合 $Z\omega(n)$ 函数和 $S(n)$ 函数的性质,利用初等方法研究了数论函数方程 $Z\omega(n)=\sum_{d\mid n}S(d)$ 的可解性,给出当 n 仅有一个素因子或无平方因子时,方程(1)无正整数解,当 n 含有平方素因子且仅有两个素因子时,方程(1)有无穷多组正整数解.

关键词:Smarandache 函数;伪 Smarandache 无平方因子函数;数论函数方程;正整数解
中图分类号:O156.1　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1000-2162(2022)04-0019-05

The solvability of the equation $Z\omega(n)=\sum_{d\mid n}S(d)$

LI Changji
(Tibetan-Chinese Bilingual School, Aba Teachers University, Wenchuan 623002, China)

Abstract: Let $Z\omega(n)$ be the pseudo-Smarandache squarefree function, $S(n)$ be the Smarandache function. Combining the properties of function $Z\omega(n)$ and function $S(n)$, the solvability of the arithmetic function equation $Z\omega(n)=\sum_{d\mid n}S(d)$ has been studied with elementary methods , and when n has only one prime factor or square-free factor, the equation (1) has no positive integer solution, when n has only two prime factors, the equation (1) has infinitely many positive integer solutions.

Keywords: Smarandache function; pseudo-Smarandache squarefree function; arithmetic function equation; positive integer solutions

数论学家 F.Smarandache 在其《Only Problems, Not Solution》一书中定义了 Smarandache 函数 $S(n)$ 和伪 Smarandache 无平方因子函数 $Z\omega(n)$. Smarandache 函数 $S(n)=\min\{m\in\mathbb{Z}^+\mid n\mid m!\}$ 表示使 $n\mid m!$ 成立的最小正整数 m,伪 Smarandache 无平方因子函数 $Z\omega(n)$ 表示最小的正整数 m,使得 $n\mid m^n$,即 $Z\omega(n)=\min\{m\in\mathbb{Z}^+\mid n\mid m^n\}$. 很多学者对函数 $S(n)$ 和 $Z\omega(n)$ 的性质进行了研究,如文献[1-5].文献[6]研究了方程 $\sum_{i=1}^{n}Z\omega(n)=Z\omega\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$ 的可解性.文献[7-9]研究了方程 $\sum_{d\mid n}S(d)=$

收稿日期:2021-01-06
基金项目:国家自然科学基金地区基金资助项目(12161001);四川省应用基础研究项目(2018JY0458);阿坝师范学院科研项目(20170101,201909011,ASA20-06,ASB21-04)
作者简介:李昌吉(1980－),男,四川理县人,阿坝师范学院讲师,硕士,E-mail: abalcj@163.com.

$\varphi(n)$ 的可解性.文献[10]研究了方程 $\varphi(n)=S(n^k)$ 或 $\sigma(2^\alpha q)/S(2^\alpha q)$ 的可解性.文献[11]研究了方程 $Z\omega(\varphi(n))=\varphi(Z\omega(n))$ 和 $Z\omega(n)+\varphi(n)=2n$ 的可解性等.论文将研究数论函数方程

$$Z\omega(n)=\sum_{d\mid n}S(d) \tag{1}$$

的可解性,结合 $Z\omega(n)$ 函数和 $S(n)$ 函数的性质,利用初等方法给出了方程(1)在一些情况下的解的情况.

1 引理

引理 1[12] 如果正整数 $n=\prod_{i=1}^{k}p_i^{a_i}$, p_i 是素数, $a_i\in\mathbb{N}$, 那么 $Z\omega(n)=\prod_{i=1}^{k}p_i$.

引理 2[13] 如果正整数 $n=\prod_{i=1}^{k}p_i^{a_i}$, p_i 是素数, $a_i\in\mathbb{N}$, 那么

$$S(n)=\max\{S(p_1^{a_1}),S(p_2^{a_2}),\cdots,S(p_k^{a_k})\}.$$

引理 3[13] 对于素数 p 和正整数 k, 有 $(p-1)k+1\leqslant S(p^k)\leqslant kp$; 如果 $k<p$, 那么 $S(p^k)=kp$.

引理 4[14] 设 a 与 m 是整数, $\gcd(a,m)=1$, 则存在无穷多个素数 p, 满足 $p\equiv a(\bmod m)$.

2 定理及其证明

易知 $n=1$ 时, $Z\omega(n)=\sum_{d\mid n}S(d)=1$, 故 $n=1$ 是方程(1)的解.

定理 1 当 n 仅有一个素因子或无平方因子时,方程(1)无正整数解.

证明 当 n 仅有一素因子,设 $n=p^\alpha$, $\alpha\geqslant 1$, 此时 $Z\omega(n)=p$, 而

$$\sum_{d\mid n}S(d)=S(1)+S(p)+\cdots+S(p^\alpha)\geqslant 1+p,$$

有

$$Z\omega(n)<\sum_{d\mid n}S(d),$$

此时方程(1)无解.

当 n 无平方因子时,设 $n=\prod_{i=1}^{k}p_i$, $p_1<p_2<\cdots<p_k$, $k\geqslant 2$, 此时 $Z\omega(n)=\prod_{i=1}^{k}p_i$, 又

$$\sum_{d\mid n}S(d)=S(1)+\sum_{i=1}^{k}S(p_i)+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}S(p_ip_j)+\sum_{1\leqslant i<j<l\leqslant k}S(p_ip_jp_l)+\cdots+S(\prod_{i=1}^{k}p_i)=$$

$$S(1)+S(p_1)+\sum_{m_1\mid p_1}S(m_1p_2)+\sum_{m_2\mid p_1p_2}S(m_2p_3)+\sum_{m_3\mid p_1p_2p_3}S(m_3p_4)\cdots+\sum_{m_{k-1}\mid p_1p_2\cdots p_{k-1}}S(m_{k-1}p_k)=$$

$$1+p_1+2p_2+4p_3+\cdots+2^{k-1}p_k=1+\sum_{i=1}^{k}2^{i-1}p_i.$$

当 $p_1=2$ 时,有

$$\sum_{d\mid n}S(d)\equiv 1(\bmod 2),$$

而 $Z\omega(n)\equiv 0(\bmod 2)$, 此时方程(1)无解.

当 $p_1\neq 2, k=2$ 时,有

$$\sum_{d\mid n}S(d)=1+p_1+2p_2<3p_2\leqslant p_1p_2=Z\omega(n),$$

此时方程(1)无解.

当 $p_1\neq 2, k\geqslant 3$ 时,有

$$\sum_{d\mid n}S(d)=1+\sum_{i=1}^{k}2^{i-1}p_i<1+(1+2+4+\cdots+2^{k-1})p_k=1+(2^k-1)p_k<2^kp_k<\prod_{i=1}^{k}p_i=Z\omega(n),$$

此时方程(1)无解.

定理 2　当 n 含有平方素因子且仅有两个素因子时，方程(1)有无穷多组正整数解.

证明　设 $n=p^aq^b,(p,q)=1,p>q$，则若 $q=2$，即 $n=p^a2^b,b\geqslant 1$，有

$$\sum_{d\mid n}S(d)=\sum_{d\mid 2^b}S(d)+\sum_{d\mid p^a,d>1}S(d)+\sum_{d\mid p^a,d>1}S(2d)+\cdots+\sum_{d\mid p^a,d>1}S(2^bd)\geqslant$$
$$\sum_{i=0}^{b}S(2^i)+(b+1)\sum_{d\mid p^a,d>1}S(d)>2\sum_{d\mid p^a,d>1}S(d)\geqslant 2p=Z\omega(n),$$

此时方程(1)无解.

若 $p\leqslant a$，则

$$\sum_{d\mid n}S(d)=\sum_{d\mid p^a}S(d)+\sum_{d\mid q^b,d>1}S(d)+\sum_{d\mid q^b,d>1}S(pd)+\cdots+\sum_{d\mid q^b,d>1}S(p^ad)\geqslant$$
$$\sum_{i=0}^{a}S(p^i)+(a+1)\sum_{d\mid q^b,d>1}S(d)>(a+1)\sum_{d\mid q^b,d>1}S(d)\geqslant(p+1)q>pq,$$

即

$$\sum_{d\mid n}S(d)>Z\omega(n),$$

此时方程(1)无解.

同理可得，若 $q\leqslant b$，有 $\sum_{d\mid n}S(d)>Z\omega(n)$，此时方程(1)无解.

若 $n=pq^b,q>b\geqslant 2$，且 $S(n)=S(p)$，则

$$\sum_{d\mid n}S(d)=\sum_{d\mid p}S(d)+\sum_{d\mid q^b,d>1}S(d)+\sum_{d\mid q^b,d>1}S(pd)=1+p+\frac{1}{2}qb(b+1)+pb.$$

方程(1)化为

$$1+p+\frac{1}{2}qb(b+1)+pb=pq,$$

即

$$1+\frac{1}{2}qb(b+1)=p(q-b-1). \tag{2}$$

当 $b\equiv 0(\mathrm{mod}4)$ 时，有

$$1+\frac{1}{2}qb(b+1)\equiv 1(\mathrm{mod}2),$$
$$p(q-b-1)\equiv 0(\mathrm{mod}2),$$

此时方程(1)无解.

当 $b\equiv 1(\mathrm{mod}4)$ 时，有

$$1+\frac{1}{2}qb(b+1)\equiv 0(\mathrm{mod}2),$$
$$p(q-b-1)\equiv 1(\mathrm{mod}2),$$

此时方程(1)无解.

当 $b\equiv 2(\mathrm{mod}4),b\equiv 3(\mathrm{mod}4)$ 时，对 b 进行讨论：当 $b=2$ 时，方程(2)化为 $1+3q=p(q-3)$，所以 $2\leqslant q-3<3$，易知此时方程(1)无解.当 $b=3$ 时，方程(2)化为 $1+6q=p(q-4)$，所以 $1\leqslant q-4<6$，易知此时有 $p=31,q=5$，经检验，$n=31\cdot 5^3$ 是方程(1)的解.

同理，对 $b\leqslant 100$ 进行计算检验，得到方程(1)的解有：$n=31\cdot 5^3$，$103\cdot 11^7$，$499\cdot 19^{14}$，$1601\cdot 29^{23}$，$23\ 311\cdot 37^{35}$，$31\ 981\cdot 41^{39}$，$32\ 713\cdot 67^{62}$，$17\ 333\cdot 71^{62}$，$9\ 643\cdot 79^{62}$，$7\ 177\cdot 89^{63}$，$90\ 703\cdot 73^{70}$，$15\ 199\cdot 109^{83}$，$340\ 693\cdot 89^{87}$，$216\ 553\cdot 97^{94}$，$75\ 161\cdot 101^{94}$，$57\ 487\cdot 103^{94}$.

易知当 $q\equiv 1(\mathrm{mod}4),b=q-2,p=\frac{1}{2}q(q-1)(q-2)+1$ 时，满足条件

$$1+\frac{1}{2}qb(b+1)=p(q-b-1),p>bq,$$

即 $n=(\frac{1}{2}q(q-1)(q-2)+1)\cdot q^{q-2}$ 是方程(1)的解,又

$$p=\frac{1}{2}q(q-1)(q-2)+1\equiv 1(\bmod q),$$

由引理 5 知满足条件的素数 p 有无穷多个,所以方程(1)有无穷多解.

若 $n=p^a q,p>a\geqslant 2$,此时有 $S(n)=S(p^a)$,则

$$\sum_{d\mid n}S(d)=\sum_{d\mid p^a}S(d)+\sum_{d\mid q,d>1}S(d)+\sum_{d\mid p^a,d>1}S(qd)=$$
$$1+\frac{1}{2}pa(a+1)+q+\frac{1}{2}pa(a+1)=1+q+pa(a+1).$$

方程(1)化为 $1+q+pa(a+1)=pq$,而 $1+q+pa(a+1)\equiv 0(\bmod 2)$,$pq\equiv 1(\bmod 2)$,所以此时方程(1)无解.

若 $n=p^a q^b,p>a,q>b\geqslant 2,t=\max\{a,b\}$,则

$$\sum_{i=0}^{a}S(p^i)+(a+1)\sum_{d\mid q^b,d>1}S(d)\leqslant\sum_{d\mid n}S(d)=$$
$$\sum_{d\mid p^a}S(d)+\sum_{d\mid q^b,d>1}S(d)+\sum_{d\mid q^b,d>1}S(pd)+\cdots+\sum_{d\mid q^b,d>1}S(p^a d)\leqslant\sum_{d\mid p^a}S(d)+\sum_{d\mid q^b,d>1}S(d)+abS(p^t),$$

即

$$1+\sum_{i=1}^{a}pi+(a+1)\sum_{j=1}^{b}qj\leqslant\sum_{d\mid n}S(d)\leqslant\sum_{d\mid p^a}S(d)+\sum_{d\mid q^b,d>1}S(d)+abS(p^t),$$
$$1+\frac{1}{2}pa(a+1)+\frac{1}{2}(a+1)qb(b+1)\leqslant\sum_{d\mid n}S(d)\leqslant 1+\frac{1}{2}pa(a+1)+\frac{1}{2}qb(b+1)+abpt.$$

同理,有

$$\sum_{i=0}^{b}S(q^i)+(b+1)\sum_{d\mid p^a,d>1}S(d)\leqslant\sum_{d\mid n}S(d)=$$
$$\sum_{d\mid q^b}S(d)+\sum_{d\mid p^a,d>1}S(d)+\sum_{d\mid p^a,d>1}S(qd)+\cdots+\sum_{d\mid p^a,d>1}S(q^b d)\leqslant$$
$$\sum_{d\mid p^a}S(d)+\sum_{d\mid q^b,d>1}S(d)+abS(p^t),$$

即

$$\sum_{i=0}^{b}S(q^i)+(b+1)\sum_{d\mid pq,d>1}S(d)\leqslant\sum_{d\mid n}S(d)\leqslant\sum_{d\mid p^a}S(d)+\sum_{d\mid q^b,d>1}S(d)+abS(p^t),$$
$$1+\frac{1}{2}qb(b+1)+\frac{1}{2}(b+1)pa(a+1)\leqslant\sum_{d\mid n}S(d)\leqslant 1+\frac{1}{2}pa(a+1)+\frac{1}{2}qb(b+1)+abpt,$$

所以,有

$$2+\frac{1}{2}pa(a+1)(b+2)+\frac{1}{2}qb(b+1)(a+2)\leqslant 2\sum_{d\mid n}S(d)\leqslant 2+pa(a+1)+qb(b+1)+2abpt.$$

故方程(1)有解的必要条件之一是

$$2+\frac{1}{2}pa(a+1)(b+2)+\frac{1}{2}qb(b+1)(a+2)\leqslant 2pq\leqslant 2+pa(a+1)+qb(b+1)+2abpt.$$

综上,定理 2 得证.

3 结束语

研究了含有伪 Smarandache 无平方因子函数 $Z\omega(n)$ 和 Smarandache 函数 $S(n)$ 的数论函数方程 $Z\omega(n)=\sum_{d\mid n}S(d)$ 的可解性.结合 $Z\omega(n)$ 函数和 $S(n)$ 函数的性质,利用初等方法,得出结论:当 n 仅有一个素因子或无平方因子时,方程 $Z\omega(n)=\sum_{d\mid n}S(d)$ 无正整数解;当 n 含有平方素因子且仅有两个素因

子时,方程 $Z\omega(n)=\sum_{d|n}S(d)$ 有无穷多组正整数解.由于研究方法的限制,当 n 含有两个以上的素因子且有平方素因子时,方程的可解性研究难度较大,讨论较为繁琐,留待改进讨论方法后做进一步的研究.

参考文献:

[1] 张文鹏. 关于 F. Smarandache 函数的两个问题[J]. 西北大学学报(自然科学版),2008(2):173-176.

[2] 熊文井. 关于伪 Smarandache 无平方因子函数的一个问题[J]. 西北大学学报(自然科学版),2008(2):192-193,198.

[3] 孙忱,李江华,路帆. 伪 Smarandache 无平方因子函数与 $D(n)$ 函数的混合均值[J]. 数学的实践与认识,2020,50(21):299-304.

[4] 张四保. Smarandache 函数在两数列上的下界估计[J]. 数学的实践与认识,2020,50(7):273-276.

[5] 白海荣,廖群英. Smarandache 函数的一些推广[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2018,41(1):32-38.

[6] 张沛. 一个包含伪 Smarandache 无平方因子函数的方程[J]. 郑州大学学报(理学版),2008(2):36-38.

[7] 刘卓,石鹏. 关于方程 sum from $(d/n)S(d)=\varphi(n)$ 的可解性[J]. 西南大学学报(自然科学版),2013,35(6):54-58.

[8] 白海荣,廖群英. Smarandache 函数的几类相关方程的解[J]. 数学学报(中文版),2019,62(2):247-254.

[9] 刘莉,李钰. 与 Smarandache 函数有关的一个方程的解的注记[J]. 数学学报(中文版),2021,64(1):151-154.

[10] 廖群英,罗文力. Smarandache 函数的准确计算公式以及相关数论方程的求解(英文)[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2017,40(1):1-10.

[11] 王曦浛,高丽,李国蓉,等. 伪 Smarandache 无平方因子函数与 Euler 函数的两个方程[J]. 甘肃科学学报,2016,28(5):23-25.

[12] FELICE R. A set of new Smarandache functions, sequences and conjectures in number theory[M]. Lupton: American Research Press, 2000.

[13] FARRIS M, MITCHELL P. Bounding the Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13(2): 37-42.

[14] 约瑟夫 H. 西尔弗曼. 数论概论[M]. 北京:机械工业出版社,2016:55-59.

(责任编辑　朱夜明)